УДК 519.63

КОНЕЧНОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ[1)]

С.И. СОЛОВЬЁВ

Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: sergei.solovyev@kpfu.ru

FINITE-DIMENSIONAL APPROXIMATION OF SPECTRAL PROBLEMS

S.I. SOLOV′ËV

Kazan Federal University

Аннотация

Спектральная задача в бесконечномерном гильбертовом пространстве аппроксимируется задачей в конечномерном подпространстве. Исследуется сходимость и погрешность приближенных собственных значений и собственных элементов. Общие результаты иллюстрируются на примере схемы метода конечных элементов с численным интегрированием для дифференциальной задачи на собственные значения второго порядка.

Ключевые слова: собственное значение, собственный элемент, задача на собственные значения, метод конечных элементов

Summary

A spectral problem in infinite-dimensional Hilbert space is approximated by a problem in finite-dimensional subspace. Convergence and error of the approximate eigenvalues and eigenelements are investigated. The general results are illustrated by a sample scheme of finite element method with numerical integration for a second-order differential eigenvalue problem.

Keywords: eigenvalue, eigenelement, eigenvalue problem, finite element method

---

1. Постановка задачи.

Пусть V — вещественное бесконечномерное гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|$, $\mathbb{R}$ — числовая прямая. Введем симметричные билинейные формы $a:\ V\times V\to\mathbb{R}$ и $b:\ V\times V\to\mathbb{R}$. Предположим, что билинейная форма $a(\cdot,\cdot)$ является положительно-определенной и ограниченной, т.е. существуют положительные постоянные α_1 и α_2 такие, что $\alpha_1\|v\|^2\leqslant a(v,v)\leqslant\alpha_2\|v\|^2$ для любого $v\in V$. Предположим также, что билинейная форма $b(\cdot,\cdot)$ является вполне непрерывной, т.е. $b(v_i,v_i)\to b(v,v)$ при $i\to\infty$ для $v_i\rightharpoonup v$ в V при $i\to\infty$. Символом $\rightharpoonup$ обозначена слабая сходимость в гильбертовом пространстве V. Обозначим $K=\ker b$, $\ker b=\{v: v\in V,\ b(v,w)=0\ \forall w\in V\}$ и предположим $\operatorname{codim} K=\infty$.

Симметричная билинейная форма $c: V\times V\to\mathbb{R}$ называется *ограниченной*, если существует постоянная $\gamma_2>0$ такая, что $|c(v,v)|\leqslant\gamma_2\|v\|^2$ для любого $v\in V$. Минимальная постоянная в неравенстве ограниченности называется *нормой* билиненйной формы. Норма симметричной билинейной формы $c: V\times V\to\mathbb{R}$ вычисляется по правилу

$$\|c\|=\sup_{u,v\in V,\|u\|=\|v\|=1}|c(u,v)|=\sup_{v\in V,\|v\|=1}|c(v,v)|.$$

[1)] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 12-01-97026, 13-01-00908, 14-01-00755)

Для замкнутых подпространств V_1 и V_2 пространства V обозначим $c|_{V_1\times V_2} : V_1 \times V_2 \to \mathbb{R}$ сужение билинейной формы $c : V \times V \to \mathbb{R}$ на множество $V_1 \times V_2$. Зададим норму билинейной формы $c|_{V_1\times V_2} : V_1 \times V_2 \to \mathbb{R}$ по формуле

$$\|c|_{V_1\times V_2}\| = \sup_{u\in V_1, v\in V_2, \|u\|=\|v\|=1} |c(u,v)|.$$

Из полной непрерывности билинейной формы $b(\cdot,\cdot)$ вытекает свойство ограниченности, т.е. существование положительной постоянной β_2 такой, что $|b(v,v)| \leqslant \beta_2\|v\|^2$ для любого элемента $v \in V$.

Сформулируем задачу на собственные значения: найти $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in V \setminus K$ такие, что

$$a(u,v) = \lambda b(u,v) \quad \forall v \in V. \tag{1}$$

Число λ, удовлетворяющее уравнению (1), называется *собственным значением* билинейной формы $a(\cdot,\cdot)$ относительно билинейной формы $b(\cdot,\cdot)$, а элемент u − отвечающим λ *собственным элементом*. Короче λ и u будем называть собственным значением и собственным элементом задачи (1). Множество $U(\lambda)$, состоящее из собственных элементов, отвечающих собственному значению λ, и нулевого элемента, образует замкнутое подпространство в V, которое называется *собственным подпространством,* соответствующим собственному значению λ. Размерность этого подпространства называется *кратностью* собственного значения λ. Если размерность собственного подпространства равна единице, то соответствующее собственное значение называется *простым*.

Обозначим через $\mathbb{N}$ множество натуральных чисел, через $\mathbb{N}_k$ − множество k первых натуральных чисел, через $\mathbb{Z}$ − множество неотрицательных целых чисел, т.е. $\mathbb{N} = \{1,2,\ldots\}$, $\mathbb{N}_k = \{1,2,\ldots,k\}$, $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0 = \varnothing$, $\mathbb{Z} = \{0,1,\ldots\}$. Пусть $J_- \in \{\mathbb{N}_m, \mathbb{N}\}$, $J_+ \in \{\mathbb{N}_n, \mathbb{N}\}$, $m,n \in \mathbb{Z}$, $J_- \cup J_+ = \mathbb{N}$. Для подпространства W пространства V положим $W^\perp = \{v : v \in V,\ a(v,w) = 0\ \forall w \in W\}$. Определим $S(v) = b(v,v)/a(v,v)$ для любого $v \in V \setminus \{0\}$.

Теорема 1. *Задача* (1) *имеет счетное множество конечнократных собственных значений* $\lambda_{\pm k}$, $k \in J_\pm$, $J_- \cup J_+ = \mathbb{N}$, *занумерованных с учетом знака и кратности, т.е.* $\ldots \leqslant \lambda_{-k} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{-2} \leqslant \lambda_{-1} < 0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_l \leqslant \ldots$, *где каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность. Если* $J_- = \mathbb{N}$, *то* $\lambda_{-k} \to -\infty$ *при* $k \to \infty$. *Если* $J_+ = \mathbb{N}$, *то* $\lambda_k \to \infty$ *при* $k \to \infty$. *Собственным значениям* $\lambda_{\pm k}$, $k \in J_\pm$ *соответствует ортонормированная система собственных элементов* $u_{\pm k}$, $k \in J_\pm$, *такая, что* $a(u_{\pm i}, u_{\pm j}) = \delta_{ij}$, $b(u_{\pm i}, u_{\pm j}) = \delta_{ij}/\lambda_{\pm i}$, $i,j \in J_\pm$, $a(u_{\pm i}, u_{\mp j}) = b(u_{\pm i}, u_{\mp j}) = 0$, $i \in J_\pm$, $j \in J_\mp$. *Элементы* $u_{\pm k}$, $k \in J_\pm$, *образуют полную систему в пространстве* $K^\perp$. *Справедливы соотношения*

$$\lambda_{-k}^{-1} = S(u_{-k}) = \min_{v\in E_{1-k}^\perp\setminus\{0\}} S(v), \quad k \in J_-,$$

$$\lambda_k^{-1} = S(u_k) = \max_{v\in E_{k-1}^\perp\setminus\{0\}} S(v), \quad k \in J_+,$$

где $E_0 = \mathrm{span}\{0\}$, $E_0^\perp = V$, $E_{\pm k} = \mathrm{span}\{u_{\pm 1}, u_{\pm 2}, \ldots, u_{\pm k}\}$, $k \in J_\pm$.

Теорема 2. *Справедливы соотношения*

$$\lambda_{-k}^{-1} = \max_{v\in E_{-k}\setminus\{0\}} S(v), \quad k \in J_-,$$

$$\lambda_k^{-1} = \min_{v\in E_k\setminus\{0\}} S(v), \quad k \in J_+.$$

Теорема 3. *Имеют место равенства*

$$\lambda_{-k}^{-1} = \max_{W_{k-1}\in\mathcal{E}_{k-1}} \min_{v\in W_{k-1}^\perp\setminus\{0\}} S(v) = \min_{W_k\in\mathcal{E}_k} \max_{v\in W_k\setminus\{0\}} S(v), \quad k \in J_-,$$

$$\lambda_k^{-1} = \min_{W_{k-1}\in\mathcal{E}_{k-1}} \max_{v\in W_{k-1}^\perp\setminus\{0\}} S(v) = \max_{W_k\in\mathcal{E}_k} \min_{v\in W_k\setminus\{0\}} S(v), \quad k \in J_+.$$

Последующее изложение опирается на работы [1–8].

2. Аппроксимация задачи.

Для аппроксимации задачи (1) зададим конечномерные подпространства V_h пространства V, удовлетворяющие условию предельной плотности семейства подпространств V_h в пространстве V, т.е. для любого элемента v из V при $h \to 0$ имеет место соотношение

$$\varepsilon_h(v) = \inf_{v^h \in V_h} \|v - v^h\| \to 0.$$

Определим отображения $a_h : V_h \times V_h \to \mathbb{R}$ и $b_h : V_h \times V_h \to \mathbb{R}$, которые являются симметричными билинейными формами $a_h(\cdot,\cdot)$ и $b_h(\cdot,\cdot)$. Предположим, что выполнено условие аппроксимации для приближенных билинейных форм, т.е. $\delta_0^h \to 0$ при $h \to 0$, где $\delta_0^h = \|(a_h - a)|_{V_h \times V_h}\| + \|(b_h - b)|_{V_h \times V_h}\|$. Обозначим $K_h = \ker b_h$, $\ker b_h = \{v^h : v^h \in V^h,\ b_h(v^h, w^h) = 0\ \forall w^h \in V\}$, $N_h = \operatorname{codim} K_h$. Заметим, что $N_h = \operatorname{codim} K_h = \dim V_h/K_h = \dim V_h - \dim K_h$. Из условия предельной плотности выводим $N_h \to \infty$ при $h \to 0$.

Исходную задачу на собственные значения (1) будем аппроксимировать конечномерной задачей: найти $\lambda^h \in \mathbb{R}$, $u^h \in V_h \setminus K_h$ такие, что

$$a_h(u^h, v^h) = \lambda^h b_h(u^h, v^h) \quad \forall v^h \in V_h. \tag{2}$$

Число λ^h, удовлетворяющее уравнению (2), называется *приближенным собственным значением,* а элемент u^h – *приближенным собственным элементом,* отвечающим λ^h.

Обозначим через $\mathcal{E}_k(W_h)$ множество всех k-мерных подпространств W_{kh} пространства W_h, $k \in \mathbb{N}$. Множество $\mathcal{E}_0(W_h)$ состоит только из $E_{0h} = \operatorname{span}\{0\}$. Положим $\mathcal{E}_k = \mathcal{E}_k(V_h)$ при $k \in \mathbb{Z}$. Для подпространства W_h пространства V_h обозначим

$$W_h^\perp = \{v^h : v^h \in V_h,\ a_h(v^h, w^h) = 0\ \forall w^h \in W_h\}.$$

Определим $S_h(v^h) = b_h(v^h, v^h)/a_h(v^h, v^h)$ для любого $v^h \in V_h \setminus \{0\}$.

Теорема 4. *При достаточно малых h задача (2) имеет N_h конечнократных собственных значений $\lambda_{\pm k}^h$, $k \in J_\pm^h$, $J_-^h = \mathbb{N}_m$, $J_+^h = \mathbb{N}_n$, $m+n = N_h$, $m, n \in \mathbb{Z}$, занумерованных с учетом знака и кратности, т.е. $\lambda_{-m}^h \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{-2}^h \leqslant \lambda_{-1}^h < 0 < \lambda_1^h \leqslant \lambda_2^h \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n^h$, где каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность. Собственным значениям $\lambda_{\pm k}^h$, $k \in J_\pm^h$ соответствует ортонормированная система собственных элементов $u_{\pm k}^h$, $k \in J_\pm^h$, такая, что $a_h(u_{\pm i}^h, u_{\pm j}^h) = \delta_{ij}$, $b_h(u_{\pm i}^h, u_{\pm j}^h) = \delta_{ij}/\lambda_{\pm i}^h$, $i, j \in J_\pm^h$, $a_h(u_{\pm i}^h, u_{\mp j}^h) = b_h(u_{\pm i}^h, u_{\mp j}^h) = 0$, $i \in J_\pm^h$, $j \in J_\mp^h$. Элементы $u_{\pm k}^h$, $k \in J_\pm^h$, образуют полную систему в пространстве $K_h^\perp$. Справедливы соотношения*

$$(\lambda_{-k}^h)^{-1} = S_h(u_{-k}^h) = \min_{v^h \in E_{1-k,h}^\perp \setminus \{0\}} S_h(v^h) = \max_{v^h \in E_{-kh} \setminus \{0\}} S_h(v^h) =$$

$$= \max_{W_{k-1,h} \in \mathcal{E}_{k-1,h}} \ \min_{v^h \in W_{k-1,h}^\perp \setminus \{0\}} S_h(v^h) = \min_{W_{k,h} \in \mathcal{E}_{kh}} \ \max_{v^h \in W_{kh} \setminus \{0\}} S_h(v^h), \quad k \in J_-^h,$$

$$(\lambda_k^h)^{-1} = S_h(u_k^h) = \max_{v^h \in E_{k-1,h}^\perp \setminus \{0\}} S_h(v^h) = \min_{v^h \in E_{kh} \setminus \{0\}} S_h(v^h) =$$

$$= \min_{W_{k-1,h} \in \mathcal{E}_{k-1,h}} \ \max_{v^h \in W_{k-1,h}^\perp \setminus \{0\}} S_h(v^h) = \max_{W_{kh} \in \mathcal{E}_{kh}} \ \min_{v^h \in W_{kh} \setminus \{0\}} S_h(v^h), \quad k \in J_+^h,$$

где $E_{0h} = \operatorname{span}\{0\}$, $E_{0h}^\perp = V_h$, $E_{\pm kh} = \operatorname{span}\{u_{\pm 1}^h, u_{\pm 2}^h, \ldots, u_{\pm k}^h\}$, $k \in J_\pm^h$.

3. Исследование сходимости.

Теорема 5. *Пусть* $\lambda^h_{\pm k},\ k\in J^h_\pm,\ J^h_- = \mathbb{N}_m,\ J^h_+ = \mathbb{N}_n,\ m+n = N_h,\ m,n\in\mathbb{Z},$ *— собственные значения приближенной схемы* (2), *занумерованные с учетом знака и кратности, т.е.* $\lambda^h_{-m}\leqslant\ldots\leqslant\lambda^h_{-2}\leqslant\lambda^h_{-1}<0<\lambda^h_1\leqslant\lambda^h_2\leqslant\ldots\leqslant\lambda^h_n$, *которым соответствуют собственные элементы* $u^h_{\pm k},\ k\in J^h_\pm$, *такие, что* $a_h(u^h_{\pm i},u^h_{\pm j})=\delta_{ij},\ b_h(u^h_{\pm i},u^h_{\pm j})=\delta_{ij}/\lambda^h_{\pm i},\ i,j\in J^h_\pm,$ $a_h(u^h_{\pm i},u^h_{\mp j})=b_h(u^h_{\pm i},u^h_{\mp j})=0,\ i\in J^h_\pm,\ j\in J^h_\mp$. *Тогда имеет место сходимость* $\lambda^h_{\pm k}\to\lambda_{\pm k}$ *при* $h\to 0$, *из каждой последовательности* $h'\to 0$ *можно выбрать подпоследовательность* $h''\to 0$ *такую, что* $u^h_{\pm k}\to u_{\pm k}$ *в* V *при* $h=h''\to 0$, *где* $\lambda_{\pm k},\ u_{\pm k},\ k\in J_\pm$, *— собственные значения и собственные элементы задачи* (1), *удовлетворяющие соотношениям* $\ldots\leqslant\lambda_{-k}\leqslant\ldots\leqslant\lambda_{-2}\leqslant\lambda_{-1}<0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\ldots\leqslant\lambda_l\leqslant\ldots,\ a(u_{\pm i},u_{\pm j})=\delta_{ij},\ b(u_{\pm i},u_{\pm j})=\delta_{ij}/\lambda_{\pm i},\ i,j\in J_\pm,$ $a(u_{\pm i},u_{\mp j})=b(u_{\pm i},u_{\mp j})=0,\ i\in J_\pm,\ j\in J_\mp$. *Если* $\lambda_{\pm k}$ *— простое собственное значение и знаки собственных элементов* $u^h_{\pm k}$ *выбраны так, что* $a_h(u^h_{\pm k},P_h u_{\pm k})>0$, *то* $u^h_{\pm k}\to u_{\pm k}$ *в* V *при* $h\to 0,\ k\in J^h_\pm$.

Расстояние между подпространствами будем измерять с помощью раствора. Пусть W_1 и W_2 — два замкнутых подпространства гильбертова пространства V с нормой $\|\cdot\|$, $\dim W_1 = \dim W_2<\infty$, P_i — ортопроектор на W_i, $i=1,2$. Раствор подпространств W_1 и W_2 гильбертова пространства V определяется по правилу

$$\vartheta(W_1,W_2)=\|P_1-P_2\|=\sup_{w\in W_2,\ \|w\|=1}\|w-P_1w\|=\sup_{w\in W_1,\ \|w\|=1}\|w-P_2w\|.$$

В этом соотношении через $\|\cdot\|$ обозначена также норма операторов из V в V.

Теорема 6. *Пусть* $\lambda_{\pm k}$ *— собственное значение задачи* (1) *кратности* s *такое, что* $\lambda_{\pm k}=\lambda_{\pm i},\ i\in J_k,\ J_k=\mathbb{N}_{k+s-1}\setminus\mathbb{N}_{k-1},\ U_{\pm k}=U(\lambda_{\pm k})$ *— собственное подпространство, отвечающее* $\lambda_{\pm k}$, $\dim U_{\pm k}=s,\ U^h_{\pm k}=\operatorname{span}\{u^h_{\pm i}, i\in J_k\},\ u^h_{\pm i},\ i\in J_k,$ *— собственные элементы приближенной схемы* (2). *Тогда имеет место сходимость* $\vartheta(U_{\pm k},U^h_{\pm k})\to 0$ *при* $h\to 0$.

4. Исследование погрешности.

Через c будем обозначать различные положительные постоянные, не зависящие от h. Введем оператор $P_h: V\to V_h$ по правилу $a(u-P_hu,v^h)=0$ для любого $v^h\in V_h$, где $u\in V,\ P_hu\to u$ в V при $h\to 0$.

Пусть $\lambda_{\pm k}$ — собственное значение задачи (1) кратности s такое, что $\lambda_{\pm k}=\lambda_{\pm i},\ i\in J_k,\ J_k=\mathbb{N}_{k+s-1}\setminus\mathbb{N}_{k-1},\ U=U_{\pm k}=U(\lambda_{\pm k})$ — собственное подпространство, отвечающее $\lambda_{\pm k}$, $\dim U_{\pm k}=s,\ U^h_{\pm k}=\operatorname{span}\{u^h_{\pm i}, i\in J_k\},\ u^h_{\pm i},\ i\in J_k,$ — собственные элементы приближенной схемы (2). Введем следующие обозначения:

$$\varepsilon^h=\sup_{u\in U,\ \|u\|=1}\varepsilon_h(u),$$

$$\delta^h_1=\|(a_h-a)|_{P_hU\times V_h}\|+\|(b_h-b)|_{P_hU\times V_h}\|,$$

$$\delta^h_2=\|(a_h-a)|_{P_hU\times P_hU}\|+\|(b_h-b)|_{P_hU\times P_hU}\|.$$

Теорема 7. *Для достаточно малых* h *выполняется оценка* $\vartheta(U_{\pm k},U^h_{\pm k})\leqslant c(\varepsilon^h+\delta^h_1),\ k\in J_\pm$.

Теорема 8. *Пусть* $u^h_{\pm i},\ i\in J^h_\pm$ *— собственные элементы приближенной задачи* (2) *такие, что* $a_h(u^h_{\pm i},u^h_{\pm j})=\delta_{ij},\ b_h(u^h_{\pm i},u^h_{\pm j})=\delta_{ij}/\lambda^h_{\pm i},\ i,j\in J^h_\pm,\ a_h(u^h_{\pm i},u^h_{\mp j})=b_h(u^h_{\pm i},u^h_{\mp j})=0,\ i\in J^h_\pm,$ $j\in J^h_\mp$. *Тогда при фиксированном* $k\in J_\pm$ *и достаточно малом* h *существуют собственные элементы* $u_{\pm i},\ i\in J_\pm$ *задачи* (1), $a(u_{\pm i},u_{\pm j})=\delta_{ij},\ b(u_{\pm i},u_{\pm j})=\delta_{ij}/\lambda_{\pm i},\ i,j\in J_\pm,\ a(u_{\pm i},u_{\mp j})=b(u_{\pm i},u_{\mp j})=0,\ i\in J_\pm,\ j\in J_\mp$, *для которых выполняются оценки погрешности* $\|u^h_{\pm i}-u_{\pm i}\|\leqslant c(\varepsilon^h+\delta^h_1),\ i\in\mathbb{N}_k$.

Теорема 9. *Для достаточно малых h справедлива оценка* $|\lambda^h_{\pm k} - \lambda_{\pm k}| \leqslant c[\delta^h_2 + (\varepsilon^h + \delta^h_1)^2]$, $k \in J_{\pm}$.

5. Дифференциальная задача.

Пусть $\Omega = (0,l)$, $\overline{\Omega} = [0,l]$. Зададим достаточно гладкие функции $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, $x \in \overline{\Omega}$, для которых существуют положительные постоянные p_1, p_2, q_2, r_2 такие, что $p_1 \leqslant p(x) \leqslant p_2$, $0 \leqslant q(x) \leqslant q_2$, $|r(x)| \leqslant r_2$ для $x \in \overline{\Omega}$. Рассмотрим дифференциальную задачу на собственные значения: найти числа λ и ненулевые функции $u(x)$, $x \in \overline{\Omega}$, такие, что $-(pu')' + qu = \lambda r u$, $x \in (0,l)$, $u(0) = u(l) = 0$.

Вариационная постановка дифференциальной задачи на собственные значения имеет вид (1). Билинейная форма a является положительно-определенной и ограниченной, а форма b является вполне непрерывной. Поэтому для дифференциальной задачи справедливы теоремы 1–3.

Разобьем отрезок $[0,l]$ равноотстоящими точками $x_i = ih$, $i = 0,1,\ldots,m$, на элементы $e_i = (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1,2,\ldots,m$, $h = l/m$. Обозначим через V_h подпространство пространства V, состоящее из функций v^h, принадлежащих пространству полиномов n-й степени на каждом элементе $e_i = (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1,2,\ldots,m$, $\dim V_h = mn - 1$. Определим билинейные формы a_h и b_h с помощью составной квадратурной формулы точной для многочленов степени $2n - \nu - 1$ при $\nu = 0,1$, на каждом элементе $e_i = (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1,2,\ldots,m$.

Вариационная постановка дифференциальной задачи аппроксимируется по методу конечных элементов с численным интегрированием (2). Для приближенной задачи справедливы теоремы 4–9 при $\varepsilon^h \leqslant ch^n$, $\delta^h_0 \leqslant ch^{2-\nu}$, $\delta^h_1 \leqslant ch^{n-\nu+1}$, $\delta^h_2 \leqslant ch^{2n-\nu}$, $\nu = 0,1$.

Теорема 10. *Пусть* $k \in J^h_{\pm}$, $\nu = 0,1$. *Тогда для достаточно малых h выполняются оценки погрешности* $|\lambda^h_{\pm k} - \lambda_{\pm k}| \leqslant ch^{2n-\nu}$, $\vartheta(U_{\pm k}, U^h_{\pm k}) \leqslant ch^n$. *Существуют ортонормированные собственные элементы* $u_{\pm i}$, $i \in J_{\pm}$, $u^h_{\pm i}$, $i \in J^h_{\pm}$, *для которых справедливы оценки погрешности* $\|u^h_{\pm i} - u_{\pm i}\| \leqslant ch^n$, $i \in \mathbb{N}_k$, *при фиксированном* $k \in J_{\pm}$ *и достаточно малом h, где* $a_h(u^h_{\pm i}, u^h_{\pm j}) = \delta_{ij}$, $b_h(u^h_{\pm i}, u^h_{\pm j}) = \delta_{ij}/\lambda^h_{\pm i}$, $i,j \in J^h_{\pm}$, $a_h(u^h_{\pm i}, u^h_{\mp j}) = b_h(u^h_{\pm i}, u^h_{\mp j}) = 0$, $i \in J^h_{\pm}$, $j \in J^h_{\mp}$, $a(u_{\pm i}, u_{\pm j}) = \delta_{ij}$, $b(u_{\pm i}, u_{\pm j}) = \delta_{ij}/\lambda_{\pm i}$, $i,j \in J_{\pm}$, $a(u_{\pm i}, u_{\mp j}) = b(u_{\pm i}, u_{\mp j}) = 0$, $i \in J_{\pm}$, $j \in J_{\mp}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Соловьёв С.И.** Метод конечных элементов для несамосопряженных спектральных задач // Ученые записки Казанского государственного университета. Сер. Физ.-матем. науки. – 2006. – Т. 148, кн. 4. – С. 51–62.
2. **Соловьёв С.И.** Аппроксимация вариационных задач на собственные значения // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т. 46, № 7. – С. 1022–1032.
3. **Соловьёв С.И.** Нелинейные задачи на собственные значения. Приближенные методы. – Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing, 2011. – 256 с.
4. **Соловьёв С.И.** Аппроксимация неотрицательно-определенных спектральных задач // Дифференциальные уравнения. – 2011. – Т. 47, № 8. – С. 1075–1082.
5. **Соловьёв С.И.** Аппроксимация знаконеопределенных спектральных задач // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48, № 7. – С. 1042–1055.
6. **Соловьёв С.И.** Аппроксимация дифференциальных задач на собственные значения // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 49, № 7. – С. 936–944.
7. **Соловьёв С.И.** Аппроксимация дифференциальных задач на собственные значения с нелинейной зависимостью от параметра // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50, № 7. – С. 955–962.
8. **Solov'ev S.I.** Finite element approximation with numerical integration for differential eigenvalue problems // Applied Numerical Mathematics. – 2014. `http://dx.doi.org/10.1016/j.apnum.2014.02.009`

REFERENCES

1. **Solov'ev S.I.** Finite element method for non-selfadjoint spectral problems [Metod konechnukh elementov dlja nesamocoprjazhennykh spektral'nykh zadach] // Kazan. Gos. Univ. Uchen. Zap. Ser. Fiz.-Mat. Nauki. — 2006. — V. 148, Book 4. — P. 51—62 (in Russian).
2. **Solov'ev S.I.** Approximation of variational eigenvalue problems // Differential Equations. — 2010. — V. 46, № 7. — P. 1030—1041.
3. **Solov'ev S.I.** Non-linear Eigenvalue Problems. Approximate Methods [Nelineinye zadachi na sobstvennye znacheniya. Priblizhennye metody]. — Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing, 2011. — 256 p. (in Russian)
4. **Solov'ev S.I.** Approximation of Positive Semidefinite Spectral Problems // Differential Equations. — 2011. — V. 47, № 8. — P. 1188—1196.
5. **Solov'ev S.I.** Approximation of Sign-Indefinite Spectral Problems // Differential Equations. — 2012. — V. 48, № 7. — P. 1028—1041.
6. **Solov'ev S.I.** Approximation of Differential Eigenvalue Problems // Differential Equations. — 2013. — V. 49, № 7. — P. 908—916.
7. **Solov'ev S.I.** Approximation of differential eigenvalue problems with a Nonlinear Dependence on the Parameter // Differential Equations. — 2014. — V. 50, № 7. — P. 947—954.
8. **Solov'ev S.I.** Finite element approximation with numerical integration for differential eigenvalue problems // Applied Numerical Mathematics. — 2014. `http://dx.doi.org/10.1016/j.apnum.2014.02.009`